V KONFERENCJA FILOZOFIA MATEMATYKI I INFORMATYKI

Poznań, 9-10 grudnia 2016

Patronat: Polskie Towarzystwo Logiki i Filozofii Nauki

ABSTRAKTY

Gabriela Besler

Instytut Filozofii
Uniwersytet Śląski
gabriela.besler@us.edu.pl
besler.gabriela@gmail.com

Tematyka korespondencji naukowej Gottloba Fregego z Giuseppe Peano w latach 1891-1903

Korespondencja Fregego z Peano liczy 12 dokumentów i zaczęła się po opublikowaniu przez Fregego *Grundlagen der Arithmetik* (1884), a zakończyła po wydaniem drugiego tomu *Grunddgesetze der Arithmetik* (1903), w dodatku do którego Frege przedstawił problem antynomii w swoim systemie. W tym samym czasie obaj korespondowali także z B. Russellem, D. Hilbertem, M. Paschem i Ph. Jourdainem.

Peano znał następujące książki Fregego: *Begriffsschrift* (1879), *Grunddgesetze der Arithmetik* (1893). Tam szukał porównania swojego symbolizmu z tym wprowadzonym przez Fregego. Frege znał co najmniej dwa teksty Peano: *Formulaire de Mathématiques*, vol 1, Turin 1895; *Notations de logique mathématique* Turin 1894.

Tematyka korespondencji. Komentarze dotyczące powyższych tekstów. „[P]aralelnościć dwóch systemów zapisu, logiki matematycznej i pisma pojęciowego". Porównywanie zapisów formuł logicznych w obu systemach. Peano i Frege wyjaśniają, jak czytać ich symbolikę. Konieczna ilością znaków pierwotnych w systemie logicznym. Teoria definicji, krytyka wprowadzanych definicje (np. dodawania, równości), warunki poprawnych definicji. Dyskusja nad rozumieniem znaku dedukcji. Kwantyfikatory, ich rozumienie i zapis. Różnica między znakami Ɔ i ε. Problem antynomii nie był omawiany listownie z Peano.

Frege odwoływał się do swojego zaplecza semiotyczno-filozoficznego i dokonywał analiz z odniesieniem do sensu i znaczenia, myśli jako sensu zdania, prawdy (fałszu) jako znaczenia zdań prawdziwych (fałszywych).

G. Frege: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Gebundene Ausgabe*. Bd. 2 *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg 2013, ss.305.
H. Kennedy: *Peano. Life and Work*. San Francisko 2002.
G. Peano: *Selected Works*. Transl., ed. H. Kennedy. London 1973.

Piotr Błaszczyk

Kartezjusz i twierdzenie Pitagorasa

1. Twierdzenie Pitagorasa to twierdzenie I.47 *Elementów*:
(1) „W trójkątach prostokątnych kwadrat na (ἀπό) boku leżącym naprzeciwko kata prostego, jest równy kwadratom na (ἀπό) bokach obejmujących kąt prosty".

Występujące tu pojęcie równości ma sens na gruncie Euklidesa teorii pola. Teoria ta składa się z wybranych konstrukcji i aksjomatów pozwalających orzekać równość o figurach nieprzystających.

Współcześnie, np. w *Podstawach geometrii* K. Borsuka i W. Szmielew, twierdzenie Pitagorasa traktuje nie o kwadratach, a o długościach odcinków:
(2) „Jeżeli w trójkącie ABC kąt w A jest prosty, to $\rho(BA)^2 + \rho(AC)^2 = \rho(BC)^2$ ", gdzie $\rho(BA)$ itd. to liczby rzeczywiste określające długości odpowiednich boków trójkąta.

Inna, nawet bardziej popularna stylizacja, traktuje o polach kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego. Obydwie wersje zakładają arytmetykę liczb rzeczywistych.

W matematyce greckiej nie występuje ani pojęcie długości odcinka, ani pola figury, dlatego potrzebne są specjalne zabiegi, aby wykazać, ze twierdzenia (1) i (2) mają ze sobą cokolwiek wspólnego. Standardowe rozwiązanie polega na interpretacji *Elementów* w geometrii analitycznej na płaszczyźnie R2. Wówczas jednak zmienia się status twierdzenia Pitagorasa: w geometrii analitycznej jest ono stosowane w definicji metryki i nie jest dowodzone.

2. W wystąpieniu pokazujemy, jak w *Geometrii* Kartezjusz zmienił twierdzenie (1) formułując je w arytmetyce odcinków. Pokazujemy, ze jego wersja jest pośrednia miedzy (1) i (2). Te trzy wersje twierdzenia I.47 przedstawiamy schematycznie w następujący sposób:

$\square, \square = \square$	Euklidesa teoria pola
$a^2 + b^2 = c^2$	Kartezjusza arytmetyka odcinków
$a^2 + b^2 = c^2$	arytmetyka liczb rzeczywistych

Przejście od (1) do wersji Kartezjusza polega na zastąpieniu antycznej teorii proporcji arytmetyka odcinków. Przejście od wersji Kartezjusza do współczesnej polega na zastąpieniu arytmetyki odcinków arytmetyka liczb rzeczywistych. Cały ten proces – rozpoczęty Księgą V *Elementów* i zwieńczony *¨Uber den Zahlbegriff* Hilberta – przedstawiamy jako kształtowanie się pojęcia ciała uporządkowanego.

3. Pokazujemy, ze zmiana sensu twierdzenia I.47 dokonuje się w warstwie słownej i symbolicznej *Geometrii*: miast o „kwadratach na bokach” (Euklides), Kartezjusz pisze o „kwadratach boków”, *carrés des côtés*, natomiast w formułach opisujących trójkąty przedstawione na diagramach znajdujemy odpowiedniki wzoru $a^2 + b^2 = c^2$. Kartezjusz nie komentuje faktu, ze zmienia sens twierdzenia I.47, tym bardzie nie dowodzi tego nowego twierdzenia.

Zagadką jest, dlaczego tak radykalna zmiana sensu najważniejszego twierdzenia matematyki nie została zauważona przez blisko 380 lat, jakie minęły od pierwszego wydania *Geometrii*.

Literatura

P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Ksiegi V–VI. Tłumaczenie i komentarz*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.
P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków 2015

Izabela Bondecka-Krzykowska
Wydział Matematyki i Informatyki UAM Poznań

O obiekcie badań informatyki

Informatyka jest stosunkowo młodą dyscypliną wiedzy, która zajmuje szczególne miejsce w naszej rzeczywistości – jej wytwory są bowiem wszechobecne. Co więcej, systemy komputerowe są coraz częściej wykorzystywane w wielu gałęziach nauki i to nie tylko do wykonywania skomplikowanych obliczeń, ale również do eksperymentowania, a nawet do dowodzenia twierdzeń matematycznych.

W moim odczycie przedstawię przegląd pojawiających się w literaturze prób zdefiniowania informatyki jako nauki poprzez określenie obiektów jej badań. Omówię pokrótce wybrane kwestie filozoficzne związane z: komputerem, programem komputerowym oraz informacją.

Literatura

Colburn, T. R. **(**2000). *Philosophy and Computer Science*. M.E. Sharpe Hamming, 1969
Hayes, P. J. (1997). What is a computer? An electronic discussion. *The Monist, 80* (3), 389-404
Kroes, P. i Meijers, A. (2006). The dual nature of technical artefacts. *Studies in History and Philosophy of Science, 37*(1), 1-4.

Searle, J. R. (1990). Is the Brain a Digital Computer? *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, *64*, 21-37.

Jerzy Dadaczyński
Katedra Filozofii Logiki
UPJPII w Krakowie

„*Quasi*-empiryzm" Franza Lettenmayera

Franz Lettenmayer należał w latach 30' XX wieku do szeroko pojmowanej grupy uczniów Hilberta. Mimo wpływu fundamentalistycznego środowiska w Getyndze stanął pod koniec dekady na stanowisku bliskim empiryzmowi. Wystąpienie będzie zawierało próbę charakterystyki filozofii matematyki Lettenmayera.

Roman Duda

Trzy tradycje

Licząca kilka tysięcy lat historia matematyki miała trzy okresy rozkwitu - około XVIII wieku p.n.e. (okres "babiloński'), około III wieku p.n.e. (Grecja klasyczna) i najnowszy, od XVII wieku - przedzielane długimi okresami dekadencji. Każdy wyróżniał się specyficznym podejściem do matematyki, różniącym się zasadniczo od pozostałych. Celem komunikatu jest przypomnienie ich rysów charakterystycznych i refleksja nad ich znaczeniem dzisiaj.

Mateusz Hohol
Zakład Logiki i Kognitywistyki
Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Kraków
mateuszhohol@gmail.com

Poznanie geometryczne: od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć

Monografie z zakresu poznania matematycznego koncentrują się głownie na przetwarzaniu liczb oraz struktur numerycznych, zaniedbując geometrię. Taki stan rzeczy wydaje się niesatysfakcjonujący zarówno ze względu na rolę geometrii w matematyce współczesnej, jak i w historii matematyki. Szereg wyników badań rzuca jednak światło na poznanie geometryczne.

W pierwszej części wystąpienia, wykorzystując Tinbergenowską strategię wyjaśniania zreferuję relewantne dane na temat umysłowej reprezentacji przestrzeni. Najpierw omówię bazujące na rozpoznaniu geometrii środowiska neuropsychologiczne mechanizmy (rdzenne systemy) orientacji przestrzennej i rozpoznawania kształtów. Następnie przyjrzę się ontogenezie tych mechanizmów, których produkty wraz z przyswojeniem przez dzieci języka i odpowiednim treningiem łączone są w nowy system reprezentacji geometrycznych. Dalej omówię adaptacyjną wartość orientacji przestrzennej bazującej na geometrii środowiska oraz – wykorzystując dane z zakresu etologii porównawczej – przedstawię w dużym skrócie filogenezę jej mechanizmów.

W części drugiej przejdę do poznania geometrycznego sensu stricte. Nadbudowane na reprezentacjach przestrzeni, będące efektem ewolucji kulturowej konstrukcje pojęciowe geometrii euklidesowej: są abstrakcyjne, wykazują dużą precyzję oraz cechują się stabilnością. Omawiając historyczną genezę tych własności przedstawię „grę" między diagramami oraz językiem formularnym, obejmującym zwroty typowe dla określonych sytuacji. Ten ostatni sprzyja względnie łatwemu przyswajaniu wiedzy, jej organizacji, orientacji w logicznej strukturze wywodu, przenoszeniu rozumowań do kolejnych problemów oraz przejściom od reprezentacji konkretnych do reprezentacji abstrakcyjnych.

W ostatniej części wystąpienia, odwołując się do ucieleśnionej wersji teorii podwójnego kodowania podejmę próbę integracji powyższych fragmentarycznych wyników na temat poznania geometrycznego. Szczególnym wyzwaniem ucieleśnionego poznania jest wyjaśnienie genezy pojęć abstrakcyjnych. Przedstawię hipotezę, zgodnie z którą poznanie geometryczne, jako prototypowy przykład poznania abstrakcyjnego, bazuje przede wszystkim na pojęciach kodowanych werbalnie, które tworzą „kognitywne rusztowanie", rozszerzające zasięg ucieleśnionego umysłu na nowe obszary poznania. Język naturalny wyposażony jest bowiem w umożliwiające reprezentowanie pojęć abstrakcyjnych cechy, takie jak: arbitralność słów i morfemów, niezależność od bodźców oraz produktywność.

Argumentował będę, że teza, zgodnie z którą język umożliwia dostęp do syntaktycznie rekombinowalnego, systemu symboli rozszerzającego zasięg ludzkiego ucieleśnionego poznania, może być pomocna w integracji dobrze uzasadnionych idei na temat tego, że wynalezienie języka formularnego odegrało ważną rolę w kulturowej genezie matematyki, oraz że przyswojenie języka przez dzieci umożliwia produktywne łączenie reprezentacji przestrzennych, generowanych przez rdzenne systemy poznawcze, w efekcie czego zdolne są one do uchwycenia zasad geometrii euklidesowej.

Michał Heller
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Kraków
Jerzy Król
Instytut Fizyki, Uniwersytet Śląski, Katowice

Czy liczby naturalne są naturalne?

W swoim znanym artykule Paul Benacerraff (The Philosophical Review 74, 1965, 47-73) sformułował szereg warunków, które winno spełniać strukturalistyczne rozumienie liczb naturalnych, natomiast Colin McLarty (Nous 4, 1993, 487-498) utrzymywał, że wszystkie te warunki są spełnione w teorii kategorii. Badamy ``los" liczb naturalnych w tych toposach, w których kategoria rozmaitości jest zanurzona w sposób pełny i wierny oraz pokazujemy, że własności liczb naturalnych, tak jak są one wkomponowane w strukturę tych toposów, są jeszcze bardziej radykalne niż postulował Benacerraff.

Jakub Jernajczyk

Geometryczne modele ewolucji wiedzy naukowej – na styku matematyki, filozofii i sztuki

1. Tematem prezentacji są wizualne modele rozwoju ludzkiej wiedzy, bazujące na geometrycznych własnościach koła.
2. Poza aspektem filozoficznym oraz matematycznym wyraźnie będzie tu akcentowana poznawcza rola obrazu (tzw. *myślenie wzrokowe*), stanowiąca uzasadnienie dla autorskiej prezentacji zagadnień naukowych w postaci realizacji o charakterze artystycznym.
3. Michał Heller porównuje wiedzę naukową do wnętrza koła (Heller, 1997): to co już wiemy reprezentowane jest przez pole koła, zaś obszar naszej niewiedzy rozciąga się poza jego obwodem. Na samym obwodzie koła – na styku naszej wiedzy z niewiedzą – rodzą się pytania naukowe. Co ważne, wraz ze wzrostem pola koła, symbolizującym rozwój naszej wiedzy, zwiększa się również obwód tej figury. Oznacza to, że liczba pytań i problemów czekających na rozwiązanie będzie nieustannie rosnąć.
4. W swoim opisie Heller nawiązuje do koncepcji Quine'a, który naukę porównał do *pola siły* (Quine, 1951). Na krawędzi tego pola następuje kontakt z doświadczeniem, w wyniku czego we wnętrzu pola zachodzą odpowiednie zmiany.
5. Pomimo wyraźnej inspiracji obydwa modele istotnie się różnią. Metafora Hellera ma charakter kumulatywistyczny – pole naszej wiedzy nieustannie się tu powiększa, podczas gdy

Quine mówi tylko o wewnętrznych dostosowaniach pola, nie przesądzając o jego wzroście.

6. Inną metaforę wizualną znajdujemy w pismach Mikołaja z Kuzy, który porównał ideał pełnej wiedzy do koła, zaś ludzkie dążenie ku wiedzy do wielokątów wpisywanych w to koło (Mikołaj z Kuzy, 1440).

7. Metafora Kuzańczyka bazuje na starożytnej *metodzie wyczerpywania*, która służyła greckim matematykom do przybliżania pól figur oraz objętości brył (Katz, 2009). W przypadku koła metoda ta polegała na wpisywaniu weń i opisywaniu na nim kolejnych wielokątów foremnych.

8. Dzisiaj, aby przedstawić koło na ekranie cyfrowym, posługujemy się metodą znacznie mniej subtelną niż starożytna *metoda wyczerpywania*. Koło odtwarzamy z prostokątnych *pikseli* – *atomów* cyfrowego obrazu, zaś w celu wytworzenia złudzenia gładkości prezentowanego kształtu stosujemy różne techniki obliczeniowe, określane wspólnym mianem *antyaliasingu* (Hearn i Baker, 2014).

9. W odniesieniu do dyskretnej struktury ekranu cyfrowego zaproponowałem własną wizualizację procesu ewolucji wiedzy naukowej. Podobnie jak w metaforze Mikołaja z Kuzy, ideał pełnej wiedzy reprezentowany jest tu w formie koła, natomiast aktualny stan ludzkiej wiedzy przedstawia figura zbudowana z kwadratów, które ulegają kolejnym podziałom.

10. Metafora ta, tak jak i metafora Kuzańczyka, ma charakter platoński – zakłada istnienie ideału pełnej wiedzy. Istotą obydwu tych modeli nie jest też nieustanne powiększanie się pola koła, lecz wygładzanie krawędzi figury przybliżającej koło, co stanowi odpowiednik uszczegóławiania teorii naukowych. Tym, co wyróżnia zaproponowany przeze mnie model, jest zwrócenie uwagi na elementy, które są odrzucane w procesie wygładzania figury (kwadraty, które znalazły się poza obwodem idealnego koła). W kontekście ewolucji wiedzy naukowej stanowić one mogą odpowiednik sfalsyfikowanych hipotez.

Zbigniew Król

Międzynarodowe Centrum Ontologii Formalnej
Wydział Administracji i Nauk Społecznych
Politechnika Warszawska

Wybrane problemy ontologiczne i matematyczne związane z pojęciem nieskończoności

W ramach tytułowej kwestii poruszone zostaną następujące zagadnienia:

1. Czy z nieskończonością spotykamy się tylko w matematyce?
2. Dlaczego pojęcie nieskończoności generuje problemy ontologiczne?
3. Niektóre rodzaje problemów/stanowisk ontologicznych związanych z nieskończonością.
4. Kwestie matematyczne związane ze statusem ontologicznym nieskończoności, m.in. concept calculus H. Friedmana, koncepcja modeli intuicyjnych, tradycyjne podejścia do problemu i definicji nieskończoności.
5. Wnioski i otwarte problemy badawcze.

Anna Lemańska
Wydział Filozofii Chrześcijańskiej UKSW

Obiekty matematyczne a przedmioty fizyczne

Problem przedmiotu matematyki, choć tak stary jak filozofia, wciąż jest daleki od rozwiązania. Na przestrzeni wieków wypracowano w tym zakresie szereg stanowisk od skrajnego realizmu po skrajny nominalizm czy formalizm. Dla uzasadniania niektórych z tych poglądów wykorzystywano fakt, że matematyka służy do badania przyrody. Różne dane zdają się świadczyć na korzyść tezy, że obiekty matematyczne są w pewien sposób powiązane z przedmiotami materialnymi. Charakter tego powiązania nie jest jednak oczywisty. Obiekty matematyczne (bez względu na to, czym są) nie są bowiem przedmiotami fizycznymi.

W referacie skoncentruję się na dwóch klasycznych stanowiskach. Pierwsze, nawiązujące do Arystotelesa, uznaje, że bytowo pierwotne są przedmioty fizyczne, drugie, że rację miał Platon, traktując przedmioty matematyczne jako idee bytowo pierwotniejsze od świata materialnego. Każde z tych stanowisk było wielokrotnie uzasadniane, poddawano je też wielostronnej krytyce. Wydaje się jednak, że na te dyskusje można spojrzeć od strony jednej z konsekwencji obu typów koncepcji, a mianowicie matematyzowalności przyrody. Oba stanowiska wprawdzie odmiennie wyjaśniają, skąd wzięła się ta właściwość rzeczywistości przyrodniczej, to zarazem dostrzegają w przyrodzie istnienie struktur matematycznych.

Stanowiska nawiązujące do Arystotelesa wydają się atrakcyjne z tego powodu, że nie wikłają się w trudności platonizmu matematycznego. Zarazem ten typ stanowisk też nie jest pozbawiony wad. Po pierwsze, dla pełnego ujawnienia się przedmiotu matematyki konieczny jest umysł, który przez abstrakcję lub idealizację „wydobywa" z rzeczywistości przyrodniczej przedmioty matematyczne. Po drugie, świat materialny, w którym istniejemy, nie jest wieczny i niezmienny: miał początek czasowy. Powraca zatem pytanie o to, czy rzeczywiście świat materialny jest pierwotny bytowo, czy może jednak w porządku istnienia bardziej podstawowe są np. prawa przyrody, a przecież część z nich jest wyrażana za pomocą matematyki. Po trzecie, matematyzowalność przyrody zdaje się mieć swoje granice – nie wszystkie zjawiska poddają się matematycznemu opisowi. Zatem z jednej strony przyroda wydaje się być bogatsza od struktur matematycznych czy modeli matematycznych, z drugiej zaś istnieje cały szereg teorii, których związku z rzeczywistością fizyczną nie widać. Zdając sobie sprawę z trudności platonizmu matematycznego, skłaniam się jednak do przyjęcia jakiejś jego wersji.

Jerzy Mycka
Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin
e-mail: jerzm@hektor.umcs.lublin.pl

Uniwersalność obliczeń a problem całkowitości funkcji obliczalnych

Referat zaprezentuje najpierw wyjaśnienia, które udokumentują istotność uniwersalności w różnych modelach obliczeń. Następnie zademonstrowane zostaną różne możliwe wersje zdefiniowania funkcji uniwersalnej oraz twierdzenia będące konsekwencjami tych wariantów.

Goedlowska wersja definicji funkcji uniwersalnej będzie potraktowana z większą uwagą i wskazane zostaną jej główne własności.

Przy omówieniu kluczowych wyników dotyczących uniwersalności obliczeń omówione zostaną te aspekty, które wpływają na siłę otrzymanych wyników (obliczalność złożenia funkcji, istnienie punktu stałego).

W ramach wprowadzenia problemu całkowitości funkcji wyjaśniona będzie rola funkcji całkowicie niezdefiniowanej. Ponadto zagadnienie całkowitości zostanie umiejscowione w hierarchii problemów nieobliczalnych.

Na podstawie powyżej podanych wyników można będzie wskazać kolizję zachodzącą pomiędzy uniwersalnością a całkowitością w teorii funkcji obliczalnych. Zostaną podjęte próby wyjaśnienia, gdzie leży zasadniczy powód tego konfliktu oraz jakie cechy obliczalności można modyfikować w poszukiwaniu wyeliminowania wzajemnej niekompatybilności tych dwóch analizowanych własności modeli obliczeniowych.

Adam Olszewski
Wydział Filozoficzny UPJP2

O granicach informatyki

Referat posiada jako cel przeanalizowanie tego, czy informatyka, jako nauka, posiada granice. Problemem podstawowym jest ‘zdefiniowanie’ granic informatyki. Następnie zostanie przedyskutowana kwestia aksjomatyczności informatyki w sensie hilbertowskim. Potem podane zostaną dwa ‘aksjomaty’ informatyki, bądź dwie fundamentalne zasady informatyki (wg. S.C. Shapiro). Na końcu zostanie przedstawione użycie tezy Churcha a dowodzie problemu stopu.

Ewa Piotrowska

Paula Ernesta „nowa filozofia matematyki”

Angielski matematyk, dydaktyk i filozof Paul Ernest jest jednym ze współtwórców społecznego konstruktywizmu, kierunku multidyscyplinarnego zajmującego się filozofią matematyki w kontekście filozofii nauki. Kierunek ten powstał w anglo-amerykańskim środowisku naukowym i różni się od tradycyjnych nurtów, powstałych w następstwie badań nad sytuacją kryzysową w podstawach matematyki (m. in. od logicyzmu, formalizmu, intuicjonizmu). Jest pewną orientacją w badaniach całościowych nad matematyką, nie stanowi w pełni koncepcyjnie ukształtowanego systemu poglądów, będąc rodzajem „wiedzy otwartej” o jakościowo zróżnicowanym rozwoju. Zwolennicy tego kierunku chcieli sprostać nowym zadaniom i wyzwaniom poznawczym oraz czysto pragmatycznym matematyki współczesnej. Odcinają się od epistemologicznych tendencji fundamentalistycznych, proponując w matematyce relatywizm poznawczy. Przeczą też poglądom mówiącym, że struktury wewnętrzne matematyki decydują o jej podstawach epistemologicznych. Kreślą „nowy" obraz matematyki postrzeganej krytycznie (np. w odniesieniu do struktur matematycznych) i rozumianej w wymiarach poznawczych znacznie szerzej (zewnętrzne usytuowanie tej nauki oraz praktyczne jej wykorzystanie cywilizacyjno-kulturowe). Ambitne założenia poznawcze społecznego konstruktywizmu przeczą też tradycyjnemu dychotomicznemu podziałowi nauk na formalne i realne (empiryczne), podobnie jak matematyki na czystą i stosowaną. Wiedza (poznanie) – jak sądzą – ma charakter społeczny, kulturowy, koncepcyjnie zróżnicowany i rozwojowy, obiektywny i w metodzie „milczący". Opowiadają się za zmodernizowanym („dynamicznym") obrazem matematyki. Dostrzegają funkcje środków językowo-literackich (np. język, metafora, retoryka) i społecznych tej nauki (decydująca rola komunikatywna i argumentacyjna dyskursu). Procesy kształtowania się „wspólnot matematyków" potwierdzają ich tezę, że komponent społeczny determinuje struktury modelowego rozumienia „nowej matematyki". Są bliscy tezy o znaczącej roli i funkcji matematyki dostosowanej do wielorakich potrzeb współczesnego świata, akcentując szczególną jej rolę w rozwoju współczesnej „ery informatycznej". Istotna jest dla nich nie tylko wiedza i struktury wewnętrzne matematyki, ale również ci, którzy tworzą, upowszechniają i programują zręby „uspołecznionej" matematyki. Koncepcja ta znajduje zwolenników w świecie anglosaskim, skandynawskim, niemieckim (szkoła erlangeńska), w Rosji.

W swoim referacie ograniczę się tylko do przedstawienia poglądów jednego z przedstawicieli tego nurtu.

Jerzy Pogonowski[1]
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Intuicje a nabywanie wiedzy matematycznej

W odczycie zamierzamy zastanowić się nad rolą objaśnień intuicyjnych w procesie nabywania wiedzy matematycznej. Do dwóch znanych kontekstów: odkrycia oraz uzasadniania w matematyce proponujemy dodać trzeci: kontekst transmisji. Obejmuje on sposoby przekazywania wiedzy matematycznej. Odnosi się zatem zarówno do tego, jak

[1] Niniejszy tekst powstał w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*.

prezentowana i objaśniana jest matematyka w podręcznikach, jak też do tego, jakich środków używamy w procesie dydaktycznym.
Zwrócimy szczególną uwagę na wykorzystanie odwołań do intuicji w kontekście transmisji. Odwołania takie mają, rzecz jasna, wspomagać rozumienie pojęć, twierdzeń, dowodów, konstrukcji, technik matematycznych. Muszą być dobierane ze stosowną starannością, aby nie prowadziły do niepoprawnego rozumienia. Odwołania intuicyjne wykorzystują m.in.: środki lingwistyczne, rozumowania przez analogię, metafory, modele fizyczne, doświadczenie potoczne, percepcję zmysłową. Bodaj najciekawsze są odwołania intuicyjne wewnątrz samej matematyki. Za przykład służyć może objaśnianie budowania modeli teorii mnogości metoda wymuszania poprzez analogię z rozszerzeniami ciał o elementy przestępne.

Nie zajmujemy się intuicjami profesjonalnych matematyków, lecz ograniczamy się do objaśnień intuicyjnych w procesie dydaktycznym. Uwzględniamy opinie specjalistów (Piaget, Wygotski, Polya, Tall, Schoenfeld). W sposób istotny odwołujemy się do ustaleń Anny Sierpińskiej z jej monografii *Understanding in mathematics* (1994).

Rozważaną problematykę uważamy za ważną już choćby z tego powodu, że obraz matematyki, który posiada przeważającą część populacji jest wielce uproszczony, a za celowe uznać należy próby poprawy tej sytuacji. Krzewienie kultury matematycznej w zakresie dostępnym dla szerszego ogółu jest możliwe chyba jedynie poprzez dobrze dobrane objaśnienia intuicyjne, które powinny wzbudzać zainteresowanie matematyką i zachęcać do samodzielnej nauki.

Zbigniew Semadeni

Platonizujący konceptualizm w matematyce

Główną tezą referatu jest to, że każde z trzech zasadniczych stanowisk filozoficznych dotyczących matematyki: *platonizm, konceptualizm, formalizm* opisuje pewne inherentne cechy matematyki i można je wzajemnie pogodzić pod warunkiem, że potraktuje się je *deskryptywnie* jako opis pewnych ważnych aspektów matematyki, a *nie normatywnie,* tzn. usunie się z nich słowa takie jak „tylko”, „przeciwstawia się” oraz pewne tezy *explicite* negujące inne stanowiska. Przy podejściu deskryptywnym te trzy stanowiska nie są bynajmniej aż tak wzajemnie wykluczające, jak się często sądzi.

Konceptualizm będzie omawiany w kontekście *konstruktywizmu* rozumianego odmiennie niż zazwyczaj w filozofii matematyki, a mianowicie tak, jak w badaniach naukowych procesu uczenia się matematyki, m.in. w tradycji post-piagetowskiej, kładącej nacisk na specyficzną aktywność umysłową podmiotu. Bardzo ważne jest stwierdzenie, że *zawsze nowe struktury poznawcze* – zarówno w ontogenezie jak i w filogenezie – *są nadbudowywane na poprzednich i z nimi integrowane*.

Zasygnalizowane będą przykłady etapów rozwoju pojęć matematycznych, w szczególności zjawisko formowania się nowych pojęć na kolejnych poziomach najpierw jako *procesów*, które na skutek wielokrotnego powtarzania ulegają *kompresji* i stają się samodzielnymi *obiektami* myślowymi.

Analizowane będą dwa kluczowe fakty, z których każdy wyraźnie przemawia za jakimś platonizmem.

(α) *Pojęcia i dowody konstruowane w umysłach różnych matematyków są zadziwiająco zgodne*, co nie daje się wytłumaczyć konceptualistycznie bez domniemania, że ta zgodność jest odbiciem jakichś obiektywnych, zewnętrznych praw.

(β) Argumenty typu Quine'owskiego, mianowicie *zobowiązania ontologiczne* fizyki.

Jakkolwiek (α) i (β) sugestywnie narzucają tezę, że matematyka zawiera obiektywne treści, niezależne od ludzkiego poznania, to niejasny pozostaje ontologiczny status tych treści i trudno jest określić, czym miały być owe odwieczne obiekty matematyki i w jakim sensie miałyby istnieć.

Użyty w tytule termin „platonizujący konceptualizm" oznacza konceptualizm interpretowany jako stanowisko, które 1) jest oparte na ontologicznej tezie, że matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną aktywnością rozumu i 2) jest nastawione na wyjaśnienie zjawiska dość powszechnego i zarazem skutecznego stosowania platonizujących argumentów w rozumowaniach matematyków. Punktem wyjścia platonizującego konceptualizmu jest to, że podmiot aktywnie konstruuje schematy umysłowe, które trafnie pełnią rolę sugestywnych, intuicyjnych modeli dla owego idealnego świata matematyki, a zarazem dają się sformalizować i okazują się w pełni adekwatne do opisu struktur fizyki.

Wśród obiekcji dotyczących platonizmu w matematyce, oprócz argumentów typu Benaceraffa, analizowane będą trudności związane z kwestią *zastąpień ontycznych*, przez co rozumiana jest jawna lub ukryta zamiana obiektu matematycznego o nazwie X na jakiś inny obiekt, który również nazywany jest X (zmiana bytu przy zachowaniu nazwy), przy czym nowy obiekt ma pełnić rolę poprzedniego (w szczególności tak się dzieje, gdy matematyk mówi o *utożsamianiu* obiektów, które raz traktowane są jako różne, a potem jako identyczne).

Radosław Siedliński

O problemie (hiper)obliczeń biologicznych

W odczycie poruszę dwie kwestie - obie problematyczne. Pierwszą jest traktowanie układów ożywionych jako układów obliczających, gdy rozmaite procesy przebiegające zarówno na poziomie komórkowym jak i tkankowym oraz układowym interpretowane bywają jako procesy przetwarzania informacji podług reguł (jest to jedno z możliwych rozumień zwrotu "obliczenia naturalne"). Problematyczne jest tu już samo traktowanie obliczeniowych opisów układów naturalnych jako sprawozdawczych, a nie heurystycznych.

Kwestia druga pojawia się zaś w efekcie przyjęcia założenia, że układy ożywione są układami par excellence obliczającymi. Można wówczas postawić pytanie o relację możliwości obliczeniowych tak rozumianych układów ożywionych wobec możliwości Uniwersalnej Maszyny Turinga. Pogląd standardowy głosi, że możliwości obliczeniowe układów żywych nie wykraczają poza UMT. Jeżeli jednak uznamy, że możliwości obliczeniowe życia lokują się poza barierą wyznaczoną przez tezę Churcha-Turinga, to wchodzimy wówczas w obszar hiperobliczeń biologicznych.

W odczycie zaprezentuję przesłanki stojące za przyjęciem obliczeniowej interpretacji układów ożywionych, przedstawię główne obszary rozwoju obliczeń naturalnych w rozumieniu przyjętym powyżej, a także wskażę z jakich powodów próbuje się wykraczać poza standardowe rozumienie obliczeń biologicznych w obszar biologicznej hiperobliczalności.

Bartłomiej Skowron
Międzynarodowe Centrum Ontologii Formalnej
Wydział Administracji i Nauk Społecznych
Politechnika Warszawska
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II

Sprzężenia funktorów.
O jednoczącej matematykę sile teorii kategorii

Szacuje się, że rocznie dowodzonych jest 250 tyś. twierdzeń matematycznych. Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne klasyfikując gałęzie matematyki, wyróżnia ponad 5 tyś. dziedzin matematyki (wraz z dziedzinami powiązanymi z matematyką). Matematycy podczas konferencji poświęconych tylko jednej gałęzi matematyki nie rozumieją siebie nawzajem, ogrom wiedzy matematycznej jest już nie do pojęcia, nie tylko dla jednej osoby, le też dla wielkich grup osób. Czy w obliczu tego zasadne jest poszukiwanie jedności matematyki? Jeśli tak, to jak to robić?

Pośród strategii poszukiwania jedności w matematyce wyróżnić można co najmniej trzy:

(a) szukanie podstaw matematyki poprzez budowanie całej matematyki „od dołu" na wybranych pojęciach pierwotnych, np. pojęciu zbioru i należenia do zbioru oraz wskazywanie, że każde pojęcie matematyczne jest redukowalne do pojęć mnogościowych (lub innych);

(b) odnalezienie źródeł matematyki, np. czynności prowadzących do powstania form matematycznych i powrót do tych form, np. poprzez akcentowanie zastosowań matematyki;

(c) spojrzenie na istniejącą matematykę jak na galaktykę, „z góry" i odnajdowanie pośród tej złożonej różnorodności aspektów łączących i uniwersalnych, jak np. analiza produktu teoriokategoryjnego występującego pod wieloma postaciami w różnych kategoriach.

Tezą referatu jest stwierdzenie, że najskuteczniejszą formą poszukiwania jedności matematyki jest poszukiwanie typu (c). W szczególności, możliwe do zauważenia tylko dzięki teorii kategorii, zjawisko sprzężenia funktorów jest jednym z najważniejszych rozpoznań prowadzących do budowania głębokiej jedności matematyki. Sprzężenia występują w całej matematyce, sprzężone są produkt i eksponent, kwantyfikator ogólny ze szczegółowym, operacja mnogościowego zawierania i topologicznego wnętrza. Sprzężeniami są spójniki logiczne, obiekty początkowe i końcowe, grupy wolne, itd.

Sprzężenia są swoistymi pojęciowymi odwrotnościami, ich istocie i wpływie na jedność matematyki będzie poświęcony referat.

Bibliografia

1. Awodey, S. (2010). Category Theory, OXFORD LOGIC GUIDES, OUP.
2. Mac Lane, S. (1998). Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics. Springer.
3. Mac Lane, S. (1986a). Mathematics: Form and Function. Springer-Verlag,New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
4. McLarty, C. (2007). The Last Mathematician From Hilbert's Gottingen: Saunders Mac Lane as Philosopher of Mathematics. British Journal for the Philosophy of Science, 58(1):77–112.
5. Bondecka-Krzykowska, I. & Murawski, R. (2008). Teoria kategorii we współczesnej filozofii matematyki. W: Heller, M., Maczka, J., Polak, P., and Szczerbinska-Polak, M., red., Prawa przyrody, s. 95–109. Biblos, Kraków-Tarnów.

Michał Sochański

Typologie reprezentacji obiektów matematycznych oraz ich zastosowań w rozumowaniach

W moim referacie rozważony będzie, najogólniej rzecz biorąc, wpływ używanego typu reprezentacji czy notacji na sposób poznawania obiektów matematycznych – przedstawiania ich sobie i rozumowania o nich. W pierwszej kolejności omówione zostaną dwa typy reprezentacji uznawane zazwyczaj jako przeciwstawne –z jednej strony diagramy, czy wizualizacje, a z drugiej symbole oraz tworzone za ich pomocą zdania. Omówione zostaną najważniejsze własności tych dwóch typów reprezentacji, które to własności wskazują na dychotomiczny podział pomiędzy nimi. Z jednej strony mamy więc diagramy, które mają być doskonałymi narzędziami heurystycznymi, umożliwiając intuicyjny i całościowy ogląd obiektów matematycznych jednocześnie jednak nie nadając się do przeprowadzania ścisłych dowodów; z drugiej strony – symbole, oraz złożone z nich zdania, których poznanie ma być raczej linearne niż całościowe, które jednak pozwalają wyrazić idee matematyczny w sposób jasny i ścisły. Następnie ów dychotomiczny podział poddany zostanie krytycznej ocenie, w szczególności poprzez rozważenie dwóch pytań: po pierwsze, na ile własności przypisywane diagramom (i poznaniu za ich pomocą osiąganemu) faktycznie im przysługują? Po drugie, czy i w jakim stopniu własności te przysługują również innym typom reprezentacji obiektów matematycznych? Rozważymy również różne sposoby definiowania samego pojęcia diagramu, wskazujące na nieostrość podziału na diagramy i symbole. Na koniec omówimy niektóre propozycje typologii reprezentacji matematycznych, które wychodzą poza omawianą wcześniej „tradycyjną" dychotomię diagram-symbol, wskazując na jej słabości oraz na większą różnorodność „odcieni" w odniesieniu do różnych sposobów zastosowań przedstawień obiektów matematycznych. Typologie te pozwalają na pogłębienie refleksji nad rolą, jaką poszczególne typy notacji oraz reprezentacji odgrywają w poznaniu matematycznym.

Paweł Stacewicz

Politechnika Warszawska
Wydział Administracji i Nauk Społecznych

Czy informatykom musi wystarczyć nieskończoność potencjalna?

1. W referacie uwypuklę dwa aspekty rozważań o nieskończoności:

a) **matematyczny** – w ramach którego nieskończoność potencjalną przeciwstawia się *aktualnej*, a określa się ją poprzez wskazanie pewnej reguły wyznaczania kolejnych (nigdy nie kończących się) wartości pewnego typu (np. liczb naturalnych parzystych);

b) **fizyczny** – w ramach którego nieskończoność potencjalną przeciwstawia się *realnej* (lub urzeczywistnionej), a rozumie się ją jako pewien obiekt *hipotetyczny*, zakładany w teorii opisującej określony fragment rzeczywistości.

2. Ze względu na „dualny" charakter informatyki – która zajmuje się zarówno matematycznymi **modelami** obliczeń, jak i opisywanymi przez nie **realnymi** programami/urządzeniami do przetwarzania danych – w filozoficznej refleksji nad informatyką trzeba uwzględniać obydwa w/w aspekty nieskończoności.

3. Obiekty nieskończone występują w bardzo wielu (jeśli nie wszystkich) modelach obliczeń; na ogół wprowadza się je po to, by zwiększyć (teoretyczną) **moc obliczeniową** danego modelu. Ponieważ są one elementami modelu, należy je traktować jako byty **potencjalne** w sensie hipotetyczności (są teoretyczne; być może jednak, czyli potencjalnie, uda się je zidentyfikować i obliczeniowo wykorzystać w świecie fizycznym).

4. W powyższym kontekście rodzą się dwa kluczowe **zagadnienia** referatu:

a) jaki **status matematyczny** mają infinitystyczne elementy różnych modeli obliczeń (są nieskończone potencjalnie czy aktualnie; i co z tego wynika)?,

b) czy istnieje jakiekolwiek uzasadnienie dla przekonania, że owe byty hipotetyczne mogą zyskać swój **realny odpowiednik** w informatycznej praktyce (np. czy mogłaby zaistnieć maszyna wykonująca nieskończenie wiele operacji w skończonym czasie)?

Jan Woleński

Wyższa Szkołą Informatyki i Zarządzania, Rzeszów

Prawda w matematyce

(Na marginesie argumentacji Paula Benacerrafa)

Benacerraf uważa, że nie da się uzgodnić semantycznej koncepcji prawdy z kauzalną teorią poznania. Wedle tej drugiej, wiedza powstaje w wyniku przyczynowego oddziaływania przedmiotu poznania na poznający podmiot. Semantyczna teoria prawdy, matematycznej czy jakiejkolwiek innej definiuje prawdziwość w modelu, tj. abstrakcyjnej strukturze matematycznej. Wszelako takie struktury, właśnie jako obiekty abstrakcyjne, nie mogą przyczynowo oddziaływać na poznawczych agentów.

Powyższa argumentacja daje się w pewien sposób odeprzeć. Niech *T* będzie teorią, Gla zdefiniowania prawdziwości zdań z *T* trzeba określić model, powiedzmy $M^{T,}$ w którym twierdzenia teorii *T* są prawdziwe. Mamy wiec relację $\mathrm{R}(T, M^T)$ definiująca prawdę. Wszelako nie jest to relacja przyczynowa. Faktycznie, byłoby nonsensem powiedzieć, że M^T jest przyczyną prawdziwości zdań z *T*. Wszelako jeśli pytamy, czy model reprezentuje świat *W*, mamy inna relację, mianowicie $R(W, M)$ i nie żadnego powodu, aby nie przyjmować, że modele świata nie powstają w wyniku jego realnego, może także przyczynowego. oddziaływania na poznające podmioty. W konsekwencji prawda o świecie jest definiowana jako złożenie dwóch relacji, mianowicie $\mathrm{R}(T, M^T)$ i $R(W, M)$, która to operacja przeprowadza *T* w *W*. Z formalnego punktu widzenia, każda niesprzeczna teoria ma model, ale nie zawsze jest to model realnego świata. Aby dany agent poznawczy mógł wykazać, że jest, musi wziąć pod uwagę nie tylko abstrakcyjną strukturę matematyczną, ale także jej stosunek do świata. Rozumowanie Benacerrafa nie odnosi się także do prawdziwości czystych teorii matematycznych. Platonizm nie wymaga jakiejkolwiek pomocy ze strony kauzalnej epistemologii, natomiast inne rozwiązania nie mogą abstrahować od okoliczności psychologicznych (intuicjonizm) lub percepcji znaków (formalizm). Rozwiązanie „durelacyjne" idzie po linii naturalizmu w tym sensie, że wszelkie akty poznawcze są ucieleśnione.

Wiesław Wójcik
Instytut Filozofii, Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie
Instytut Historii Nauki PAN w Warszawie

Badanie podstaw rachunku prawdopodobieństwa w Polskiej Szkole Matematycznej

Rachunek prawdopodobieństwa aż do początku XX wieku nie miał ustalonego statusu. Był dyscypliną znajdującą się pomiędzy matematyką, filozofią i naukami empirycznymi. Wielu uczonych pracowało nad uściślaniem jego podstaw i poddaniem go metodom matematycznym (G. W. Leibniz, J. Bernoulli, B. Pascal, Ch. Huygens, P. Fermat, D. Bernoulli, A. Moivre, P. S. Laplace). Mimo wprowadzenia kilku ważnych pojęć i twierdzeń mających rangę matematyczną (nadzieja matematyczna, prawo wielkich liczb, twierdzenia graniczne, teoria ciągów rekurencyjnych, prawo normalne rozkładu prawdopodobieństwa), nie udało się podać ścisłej definicji samego pojęcia prawdopodobieństwa. Miedzy innymi H. Poincare wskazał w stosowanej definicji błąd *petitio principi*.

Dla odniesienia ostatecznego sukcesu kluczowe okazały się dwa nurty badań. Pierwszy z nich polegał na logicznym badaniu podstaw teorii prawdopodobieństwa (od G. W. Leibniza, poprzez B. Bolzano aż do G. Fregego, B. Russela, D. Hilberta i H. Poincarego). Natomiast w drugim nurcie poszukiwano „porządnej" teorii matematycznej, na której dałoby się zbudować rachunek prawdopodobieństwa. Okazało się, że przy pomocy teorii mnogości i teorii miary można w pełni zaksjomatyzować i zmatematyzować ten rachunek. W pełni dokonał tego rosyjski matematyk A. Kołmogorow w 1933.

W badaniach obu nurtów istotny wkład mieli polscy matematycy: J. Łukasiewicz (pierwszy nurt) oraz A. Łomnicki i H. Steinhaus (drugi nurt). Pokażę w mojej pracy znaczenie tych badań dla zrozumienia istoty prawdopodobieństwa oraz związku między logiką a teorią prawdopodobieństwa. Ponadto przedstawione badania pozwolą na ukazanie ograniczenia metody logicyzacji matematyki. Generowanie nowych pojęć wymaga bowiem wyjście poza analizę logiczną. Pokażę to na przykładzie wprowadzenia pojęć: zdarzeń elementarnych, zdarzeń losowych, prawdopodobieństwa jako miary na zdarzeniach losowych oraz niezależności stochastycznej. Jednak z drugiej strony poprzez badania logiczne staje się możliwe dostrzeżenie alternatywnych dróg rozwoju rachunku prawdopodobieństwa.

Bibliografia

[1] Łomnicki A.: *Nouveaux fondements du calcul des probabilités*, « Fundamenta Mathematicae » 4(1923), str. 34–71 .

[2] Łukasiewicz J.: *Analiza i konstrukcja pojęcia przyczyny*, w: *Przyczynowość. Prace nagrodzone na konkursie „Przeglądu Filozoficznego*”, Warszawa, 1906, str. 8–179 .
[3] Łukasiewicz J.: *Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 1913.
[4] Steinhaus H.: *Les probabilités denombrables et leur rapport á la théorie de la mesure*, « Fundamenta Mathematicae » 4(1923), str. 286–310 .

Krzysztof Wójtowicz
Zakład Filozofii Nauki
Instytut Filozofii UW

Czy pojęcie możliwego obiektu w matematyce ma sens?

W referacie zajmuje się pojęciem możliwego obiektu w odniesieniu do matematyki (i szerzej – pytaniem o status pojęć modalnych w matematyce). Wydaje się, że pojęcie możliwego obiektu matematycznego (ew. możliwej struktury matematycznej bądź świata matematycznego) jest spójne z (przynajmniej niektórymi) stanowiskami w zakresie filozofii matematyki. Twierdzę jednak, że wprowadzenie takich kategorii do dyskusji rodzi szereg problemów filozoficznych (m.in. problem kryterium identyczności, problem granic matematyczności, problem wskazania świata aktualnego, problem obiektywności wiedzy). Pojawiają się one w związku z formułowaniem pewnych tez angażujących pojęcia modalne, które – pozornie – brzmią jasno, a faktycznie jasne nie są. W szczególności – choć może się wydawać inaczej – teza głosząca istnienie wszelkich możliwych obiektów matematycznych nie jest wcale łatwa do pogodzenia z tezą matematycznego realizmu. Rodzi się hipoteza, że kategorie modalne są zbyt niejasne, aby można się było nimi owocnie posługiwać w dyskusjach dotyczących ontologii (i szerzej: filozofii) matematyki.